



STUDI METODE CRAMER DAN METODE INVERS MATRIK PADA PERSOALAN RANGKAIAN LISTRIK

Ulul Ilmi¹, Rifky Aisyatul Faroh², Ayu Ismi Hanifah³, Nur Indah Mukhoyyaroh⁴, Masruroh⁵

^{1,2}Program Studi Teknik Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Islam Lamongan

^{3,5} Prodi Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Universitas Islam Lamongan, Indonesia,

⁴ Prodi Teknik Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Islam Lamongan

Jl. Veteran No.53A, Jetis, Kec. Lamongan, Kabupaten Lamongan, Jawa Timur 62211

e-mail: ilmi78@unisla.ac.id, rifkyaisyatulfaroh@unisla.ac.id,

ayuismi@unisla.ac.id, nurindah@unisla.ac.id, masruroh@unisla.ac.id

ARTICLE INFO

Article History :

Article entry : 05-20-2023

Article revised : 06-07-2023

Article received : 28-08-2023

Keywords :

Matlab, Matric, System of Linear Equations.

ABSTRACT

In the world of engineering, one example of using a matrix is to find a solution to a system of linear equations (SLE). In the scientific field that studies electrical circuits, it is not uncommon to use matrices to calculate the quantities or values in an electric circuit. To make it easier to find these values, an operation process based on the Cramer and inverse methods based on Matlab is used so that finally the values contained in the electrical circuit are obtained. These values are electric current and electric voltage. In this study, it can be concluded that the use of the Matlab-based matrix inverse method is better in terms of the accuracy of the research results, when compared to the manual use of the Cramer method, which has an accuracy difference of 0.0006%. For the calculation of the current variable i_3 and 0.81% for the calculation of the electric voltage variable at node AB.

1. PENDAHULUAN

Dalam bidang keilmuan elektro teknik, diperlukan pengetahuan tentang rangkaian sederhana seperti rangkaian listrik. Rangkaian listrik yang dijumpai selama ini menggunakan prinsip-prinsip yang ada pada hukum Kirchoff. Terdapat dua hukum Kirchoff yaitu hukum pertama Kirchoff atau KCL (arus) lalu hukum kedua Kirchoff atau KVL (tegangan). Dengan menerapkan kedua hukum tersebut akan didapatkan sebuah persamaan linear. Jika terdapat sebuah loop, maka hanya terdapat satu persamaan linear saja, namun jika ternyata terdapat banyak loop, maka persamaan linear yang dibentuk juga banyak sama seperti loop yang ada. Dengan banyaknya persamaan linear tersebut, mengakibatkan terbentuknya sistem persamaan linear (SPL). Dalam menyelesaikan sistem persamaan linear (SPL) terdapat banyak cara, cara yang paling umum yaitu substitusi dan eliminasi. Untuk kasus SPL dua, tiga, dan empat variabel cara substitusi dan eliminasi ini mungkin masih sangat efektif dan mudah. Namun bagaimana jika

terdapat sistem persamaan linear dengan lebih dari dua variabel?

Cara tersebut memang bisa digunakan, namun waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan relatif sangat lama, dan juga tingkat kesalahan yang didapatkan juga semakin besar. Untuk mengatasi persoalan ini, ternyata terdapat cara yang membuat waktu pengerjaan relatif lebih singkat dan solusi yang dihasilkan lebih akurat. Contohnya adalah menggunakan metode operasi baris elementer, cara invers, metode Cramer, dan lain-lain. Akan tetapi, dalam penelitian ini yang akan dibahas di sini adalah mengenai metode cramer. Selain metode cramer, juga digunakan metode invers berbasis matlab.

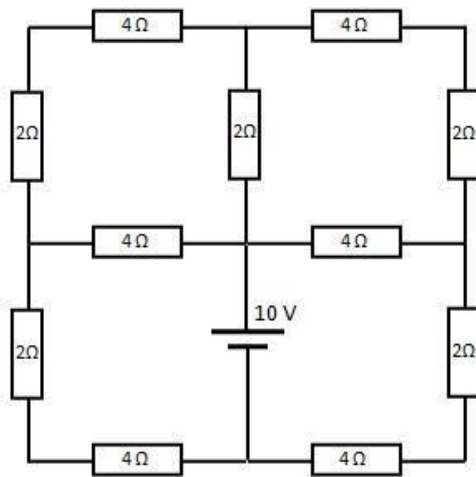
2. METODOLOGI PENELITIAN

Dengan melalui pertimbangan bahwa ranah penelitian ini masih dalam ranah wilayah eksakta, maka metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini metode eksperimen. Metode Eksperimen bermakna bahwa hasil penelitian berasal dari data yang dimasukkan ke dalam pemrograman Matlab. Matlab akan mengolah data yang berasal

dari masalah yang sedang diteliti. Dalam penelitian ini data yang diinputkan berupa angka yang dibentuk dalam sebuah matrik.

3. PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini data yang diinputkan berupa angka yang dibentuk dalam sebuah matrik. Kasus yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah sebuah rangkaian listrik yang di dalamnya terdapat sebuah sumber tegangan listrik dan beberapa hambatan listrik seperti gambar dibawah ini. Selanjutnya akan dicari tegangan dan arus listrik pada tiap-tiap titik simpul resistor untuk rangkaian berikut ini.

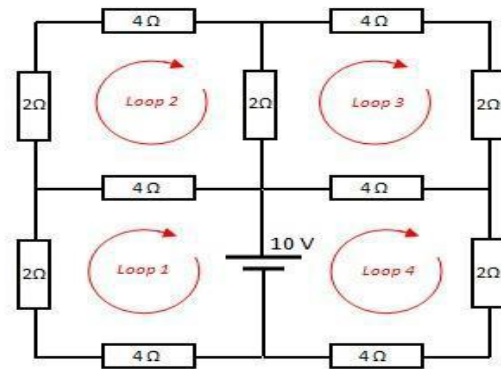


Gambar 1. Rangkaian listrik berisi 10 hambatan dan 1 sumber tegangan listrik

Pada rangkaian di atas, dapat diketahui terdapat enam hambatan senilai 4 ohm, lima hambatan senilai 2 ohm dan satu sumber tegangan senilai 10 volt. Tentukan nilai arus dari rangkaian di atas.

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan persoalan di atas digunakan Hukum II Kirchhoff yang menyatakan: Jumlah aljabar penurunan tegangan (*voltage drop*) pada rangkaian tertutup (*loop*) menurut arah yang ditentukan = jumlah aljabar kenaikan tegangan (*voltage rise*) nya. Pada rangkaian di atas sesuai dengan hukum kedua Kirchhoff didapatkan gambar 4 buah loop sembarang seperti pada gambar berikut ini.



Gambar 2. Buah loop sembarang berdasarkan Hukum Kirchoff 2

Berdasarkan hukum kirchoff 2 didapatkan 4 persamaan yaitu:

- Loop 1
 $4i_1 + 2i_1 + 4(i_1 - i_2) + 10 = 0$
 Ekuivalen dengan:
 $10i_1 - 4i_2 + 10 = 0 \dots \dots \dots (1)$
- Loop 2
 $2i_2 + 4i_2 + 2(i_2 - i_3) + 4(i_2 - i_1) = 0$
 Ekuivalen dengan:
 $12i_2 - 2i_3 - 4i_1 = 0 \dots \dots \dots (2)$
- Loop 3
 $4i_3 + 2i_3 + 4(i_3 - i_4) + 2(i_3 - i_2) = 0$
 Ekuivalen dengan
 $12i_3 - 4i_4 - 2i_2 = 0 \dots \dots \dots (3)$
- Loop 4
 $2i_4 + 4i_4 - 10 + 4(i_4 - i_3) = 0$
 Ekuivalen dengan
 $10i_4 - 4i_3 = 10 \dots \dots \dots (4)$

Dari 4 persamaan yang diperoleh dari hukum kirchoff 2, dapat dibuat 4 sistem persamaan linear seperti dituliskan di bawah ini.

$$\begin{aligned} 10i_1 - 4i_2 + 10 &= 0 \\ 12i_2 - 2i_3 - 4i_1 &= 0 \\ 12i_3 - 4i_4 - 2i_2 &= 0 \\ 10i_4 - 4i_3 &= 10 \end{aligned}$$

Dari bentuk sistem persamaan linear di atas, dapat ditransformasikan ke dalam bentuk matriks $AX = B$, seperti dituliskan di bawah ini.

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 12 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan bentuk matrik di atas digunakan metode cramer seperti dituliskan berikut ini. Langkah pertama adalah menghitung determinan. Dengan menggunakan rumus determinan dari bentuk matrik $AX = B$, yaitu

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 0 & 0; \\ -4 & 12 & -2 & 0; \\ 0 & -2 & 12 & -4; \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

maka nilai determinan dari matrik A adalah 10416. Selanjutnya dihitung nilai dari determinan A1, A2, A3 dan A4 seperti diuraikan berikut ini.

$$\det(A1) = \begin{bmatrix} -10 & -4 & 0 & 0; \\ 0 & 12 & -2 & 0; \\ 0 & -2 & 12 & -4; \\ 10 & 0 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(A1) = -11760$$

$$\det(A2) = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 & 0; \\ -4 & 0 & -2 & 0; \\ 0 & 0 & 12 & -4; \\ 0 & 10 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(A2) = -3360$$

$$\det(A3) = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -10 & 0; \\ -4 & 12 & 0 & 0; \\ 0 & -2 & 0 & -4; \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(A3) = 3360$$

$$\det(A4) = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 0 & -10; \\ -4 & 12 & -2 & 0; \\ 0 & -2 & 12 & 0; \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(A4) = 11760$$

Untuk menghitung nilai i_1 , i_2 , i_3 dan i_4 digunakan rumus di bawah ini.

$$i_1 = \det(A1) / \det(A) \dots\dots\dots (5)$$

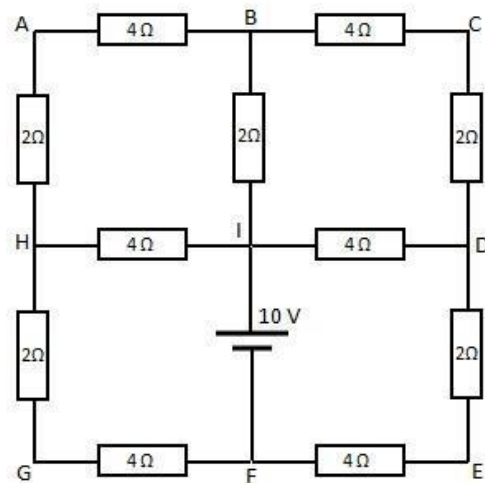
$$i_2 = \det(A2) / \det(A) \dots\dots\dots (6)$$

$$i_3 = \det(A3) / \det(A) \dots\dots\dots (7)$$

$$i_4 = \det(A4) / \det(A) \dots\dots\dots (8)$$

sehingga didapatkan $i_1 = \det(A1) / \det(A) = -11760 / 10416 = -1.129$ dibulatkan menjadi -1.13. Tanda minus menyatakan arah arus i_1 berlawanan arah dengan arah permasalahan sebelumnya. $i_2 = \det(A2) / \det(A) = -3360 / 10416 = -0.322$ dibulatkan menjadi -0.32. Tanda minus menyatakan arah arus i_2 berlawanan arah dengan arah permasalahan sebelumnya. $i_3 = \det(A3) / \det(A) = 3360 / 10416 = 0.322$ dibulatkan menjadi 0.32.

$i_4 = \det(A4) / \det(A) = 11760 / 10416 = 1.129$ dibulatkan menjadi 1.13. Terlihat bahwa nilai $i_1 = i_4$ dan nilai $i_2 = i_3$. Hal ini terjadi karena bentuk rangkaian listriknya berbentuk simentris. Sekarang menganalisa arus dalam rangkaian listrik dengan menggunakan hukum kirchoff 1. Perhatikan gambar dibawah ini.



Gambar 3. Rangkaian listrik menggunakan Hukum Kirchoff 1

Dari titik H-G-F mengalir arus i_1 yaitu : 1,13 A. Dari titik D-E-F mengalir arus i_4 yaitu : 1,13 A. Dari titik B-A-H mengalir arus i_2 yaitu : 0,32 A. Dan Dari titik B-C-D mengalir arus i_3 yaitu : 0,32 A.

Maka dengan menggunakan besarnya nilai arus dan hambatan dari tiap resistor yang didasarkan pada gambar 3, dapat dihitung nilai masing-masing titik simpul tegangan seperti akan dituliskan di bawah ini.

$$V_{AB} = V_{BC} = 0.32A \times 4\Omega = 1.28 V$$

$$V_{AH} = V_{CD} = 0.32A \times 2\Omega = 0.64 V$$

$$V_{BI} = 0.64A \times 2\Omega = 1.28 V$$

$$V_{HI} = V_{ID} = 0.81A \times 4\Omega = 3.24 V$$

$$V_{HG} = V_{DE} = 1.13A \times 2\Omega = 2.26 V$$

$$V_{GF} = V_{FE} = 1.13A \times 4\Omega = 4.52 V$$

Setelah digunakan metode cramer untuk perhitungan nilai arus dan tegangan listrik, langkah berikutnya adalah dihitung nilai arus listrik menggunakan metode invers matriks berbasis matlab yang akan dipaparkan berikut ini.

Dari data di atas diketahui vektor A adalah

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 & 0 & 0; \\ -4 & 12 & -2 & 0; \\ 0 & -2 & 12 & -4; \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Adapun nilai vektor B adalah [-10; 0; 0; 10].

Sedangkan vektor X mewakili nilai arus listrik yang dicari yaitu nilai i_1 , i_2 , i_3 dan i_4 , sementara vektor B sebagai vektor ruas sisi kanan (right hand side). Untuk menentukan nilai arus listrik yang berada di dalam vektor X maka digunakan rumus $X = \text{inv}(A) * B$, sehingga hasil dari pemrograman matlab dapat dituliskan berikut ini.

```
>> A = [ 10  -4  0  0;
        -4  12 -2  0;
         0  -2  12 -4;
         0   0 -4  10]
```

```
A =
    10    -4     0     0
    -4    12    -2     0
     0    -2    12    -4
     0     0    -4    10
>> B=[-10; 0; 0; 10]
B =
   -10
     0
     0
    10
```

```
>> X=inv(A)*B
```

```
X =
   -1.1290
   -0.3226
    0.3226
    1.1290
```

Berdasarkan hasil perhitungan berbasis invers matlab, dapat ditemukan bahwa nilai dari $i_1 = -1.1290$ A. Sedangkan jika menggunakan metode cramer didapatkan nilai dari arus $i_1 = -1.129$ A dan jika dibulatkan menjadi -1.13 A. Adapun nilai i_2 yang diperoleh dari perhitungan invers berbasis matlab adalah -0.3226 A. Sedangkan jika dihitung dengan menggunakan metode cramer diperoleh hasil i_2 senilai -0.322 A yang jika dibulatkan menjadi -0.32 A. Adapun nilai i_3 yang dihasilkan dari perhitungan invers berbasis matlab sebesar 0.3226 A. Sedangkan nilai i_3 yang dihasilkan dari perhitungan metode cramer adalah 0.322 A yang dibulatkan menjadi 0.32 A. Untuk nilai i_4 yang dihasilkan dari invers berbasis matlab, adalah 1.1290 A. Sedangkan nilai i_4 yang diperoleh dari perhitungan berbasis metode cramer adalah 1.129 A dan dibulatkan menjadi 1.13 A. Untuk lebih jelasnya nilai perbedaan arus listrik yang dihasilkan dari metode invers matriks berbasis matlab dan metode cramer, dapat disajikan dalam tabel berikut ini.

Tabel 1. Perbandingan hasil antara invers matrik berbasis matlab dan metode cramer dalam hal perhitungan arus listrik

Metode	Hasil	Ketelitian
Invers matrik berbasis matlab	$i_1 = -1.1290$ A, $i_2 = -0.3226$ A, $i_3 = 0.3226$ A, $i_4 = 1.1290$ A	100 %
Cramer	$i_1 = -1.129$ A, $i_2 = -0.322$ A, $i_3 = 0.322$ A, $i_4 = 1.1290$ A	99,81 %

Berdasarkan hasil dari tabel pertama ini dapat disimpulkan bahwa metode invers matrik berbasis matlab memberikan hasil yang berbeda jika

dibandingkan dengan metode cramer. Hal ini bisa dilihat bahwa bilangan titik mengambang (floating point), yang dihasilkan dari metode invers matrik berbasis matlab memiliki tingkat ketelitian yang lebih tinggi, jika dibandingkan dengan metode cramer. Hal ini dapat dilihat bahwa tingkat ketelitian yang didapatkan dari metode matrik berbasis matlab sebesar 100%, jika dibandingkan dengan penggunaan metode cramer yang menghasilkan tingkat ketelitian sebesar 99,81%. Hal ini dapat diperjelas lagi secara numeris, dengan menggunakan metode invers matrik berbasis matlab dihasilkan nilai $i_2 = -0.3226$ A dan $i_3 = 0.3226$ A. Sedangkan jika menggunakan metode cramer didapatkan hasil nilai $i_2 = -0.322$ A dan $i_3 = 0.322$ A, sehingga terjadi selisih tingkat ketelitian antara kedua metode ini sebesar 0.0006 %. Dengan hasil ini dapat disimpulkan metode manual yang menggunakan metode cramer, tidak disarankan dalam menyelesaikan sebuah permasalahan listrik berbasis sistem persamaan linear. Dan lebih disarankan menggunakan metode invers berbasis matlab untuk menyelesaikan persoalan rangkaian listrik berbasis matlab. Akan tetapi jika metode cramer hanya digunakan sebagai pembanding saja terhadap metode yang lain, itu tidak dimasalahkan. Berikutnya adalah hasil perbandingan antara metode invers matrik berbasis matlab dan metode cramer dalam hal perhitungan tegangan listrik, yang akan disajikan dalam tabel berikut ini.

Tabel 2. Perbandingan hasil antara invers matrik berbasis matlab dan metode cramer dalam hal perhitungan tegangan listrik

Metode	Hasil	Ketelitian
Invers matrik berbasis matlab	$V_{AB} = i_3 \times 4\Omega = 0.3226\text{A} \times 4\Omega = 1.2904$ V $V_{BC} = i_3 \times 4\Omega = 0.3226\text{A} \times 4\Omega = 1.2904$ V $V_{AH} = i_3 \times 2\Omega = 0.3226 \text{ A} \times 2\Omega = 0.6452$ V $V_{CD} = i_3 \times 2\Omega = 0.3226 \text{ A} \times 2\Omega = 0.6452$ V	100 %
Cramer	$V_{AB} = V_{BC} = 0.32\text{A} \times 4\Omega = 1.28$ V $V_{AH} = V_{CD} = 0.32\text{A} \times 2\Omega = 0.64$ V	99,19 %

Sedangkan dari hasil pada tabel 2, maka disimpulkan bahwa terdapat perbedaan tingkat ketelitian hasil perhitungan antara metode invers matrik berbasis matlab dan metode cramer sebesar 0.81 % untuk perhitungan variabel tegangan listrik pada simpul AB.

4. PENUTUP

Berdasarkan hasil dari pembahasan di atas dapat disimpulkan dalam bidang keilmuan yang mempelajari rangkaian listrik, digunakan matriks untuk menghitung besaran-besaran atau nilai-nilai yang ada di dalam rangkaian listrik. Untuk mempermudah dalam mencari nilai-nilai tersebut digunakan proses operasi berbasis metode cramer dan metode invers berbasis matlab, sehingga akhirnya diperoleh nilai-nilai yang terdapat di dalam rangkaian listrik tersebut. Nilai-nilai tersebut adalah arus listrik dan tegangan listrik. Untuk kasus dalam penelitian ini, terdapat perbedaan hasil antara metode invers berbasis matlab dengan metode cramer, dimana berdasarkan hasil penelitian disarankan menggunakan metode invers berbasis matlab, jika dibandingkan dengan metode. Hal ini disebabkan karena penggunaan metode invers berbasis matlab menghasilkan nilai arus listrik dengan tingkat ketelitian yang lebih tinggi, jika dibandingkan dengan penggunaan metode cramer, dengan selisih tingkat ketelitian antara kedua metode ini sebesar 0.0006 %. Hal ini berlaku untuk perhitungan simpul arus listrik i_3 . Sedangkan untuk perhitungan variabel tegangan listrik simpul AB, terdapat selisih perbedaan ketelitian sebesar 0.81 %.

Dengan hasil ini dapat disimpulkan metode manual yang menggunakan metode cramer, tidak disarankan dalam menyelesaikan sebuah permasalahan listrik berbasis sistem persamaan linear. Dan lebih disarankan menggunakan metode invers berbasis matlab untuk menyelesaikan persoalan rangkaian listrik berbasis matlab. Akan tetapi jika metode cramer hanya digunakan sebagai pembandingan saja terhadap metode yang lain, itu tidak dimasalahkan.

REFERENSI

- Anton, H. 1994. *Aljabar Linier Elementer. Edisi Ke-5*. Jakarta: Erlangga.
- Anton, H. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear Jilid 1. Edisi ke-7*. Terjemahan Hari Suminto. Batam: Interaksara.
- Brualdi, R. A. 2009. *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its*.
- Frleigh, J. B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra. Edisi ke-7*. United States: Addison-Wesley Publishing Company inc.,
- Leon, SJ. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya, Edisi ke-5*. Jakarta: Erlangga.
- Lerner, David. 2007. *Lecture notes on linear algebra*. Kansas: Departement of Mathematics.
- Harry Octavianus Purba. 2015/2016. *Makalah IF2123 Aljabar Geometri – Informatika ITB – Semester I*. Bandung: ITB.
- Matlab online, Tersedia di <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.
- Munir, Rinaldi. 2010. *Matematika Diskrit. Revisi ke-4*. Bandung: Informartika.
- Steve J.Leon. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya. Edisi Ke-5*. Jakarta: Erlangga.
- Supranto, J. 1998. *Pengantar Matrix. Edisi revisi*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Rangga Ajie Prayoga, dkk. 2017. *Penerapan Konsep SPL Dan Matriks Dalam Menentukan Tegangan Dan Arus Listrik Pada Tiap-Tiap Resistor*. Karawang: Universitas Singaperbangsa.
- R.H. Sianipar. 2013. *Pemrograman Matlab Dalam Contoh dan Terapan*. Bandung: Informatika.